

关于弹性力学半无限问题的注记

黄耀英¹, 王润富², 吴中如²

(1. 三峡大学, 宜昌 443002; 2. 河海大学, 南京 210098)

摘要: 根据两个合理的判断依据, 对弹性力学中的楔形体、半平面体、圆锥体和半空间体等经典解答进行了比较分析, 发现了半无限平面应变问题和半空间体问题解答之间的关系; 通过对解答之间的关系进行研究分析指出, 弹性力学中的半无限平面体的符拉芒解答和半空间体的布希涅斯克解答存在局限性。对半无限地基、底部完全位移约束的有限深地基和底部光滑刚性支承的有限深地基在水平表面作用无限均布压力时的应力和位移分量进行了比较分析, 认为底部完全位移约束的有限深地基模型较其他两种地基模型更合理些。

关键词: 半无限平面应变体; 半空间体; 判断依据; 关系; 解答局限性; 有限深地基
中图分类号: O 434 **文献标识码:** A

Note on elasticity's semi-infinite problem

HUANG Yao-ying¹, WANG Run-fu², WU Zhong-ru²

(1. China Three Gorges University, Yichang 443002, China; 2. Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: According to two logical judgements, the relation of the semi-infinite plane strain problem and semi-infinite spatial problem is found through analyzing the classical answer of wedge, semi-infinite plane, cone and semi-infinite spatial etc. The Flamant answer of semi-infinite plane strain problem and the Boussinesq answer of semi-infinite spatial problem are confinable from the relation. Based on a comparison of stress and displacement components of the semi-infinite elastic foundation, the elastic finite depth foundation with rigid constraint at the bottom, and the elastic finite depth foundation with smooth rigid supporting constraint at the bottom under infinite uniform pressure on horizontal surface, it is concluded that the elastic finite deep foundation model with rigid constraint at the bottom is more rational than other two models.

Key words: semi-infinite plane strain; semi-infinite space; logical judgement; relation; answer confinement; finite deep foundation

1 引言

从严格意义上说来, 任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但如果所考察的弹性体具有某种特殊的形状, 并且承受某种特殊的外力, 此时可以将空间问题简化为近似平面问题。自从数学家纳维和柯西对弹性力学理论做了奠基性的工作以来, 一些力学家和数学家陆续得到了许多经典弹性问题解答^[1-7]。由于问题的复杂性, 这些经典弹性问题解答的精确性难以确定。本文根据两个合理的判断依据, 对荷载作用下的半无限平面应变问题和半空间体问题的解答进行了比较分析, 发现荷载作用下的半无限平面应变问题和半空间体问题解答之间的关系, 并由此关系分析当中存在的问题与疑点, 指

出弹性力学中的半无限平面体的符拉芒解答和半空间体的布希涅斯克解答存在局限性。最后对荷载作用下的3种地基模型的位移和应力进行研究来探讨最合理解答。

2 判断依据

参考文献[1-3], 对弹性力学中的半无限问题进行研究分析时, 采用如下两个判断依据:

① 平面应变问题是空间问题的特殊情况; 平面应变问题微分方程可由空间问题的微分方程导出。

② “在水平表面作用无限均布压力下的半空间体问题”的最合理解答为

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}q, \sigma_z = -q, \tau_{ij} = 0 \quad (1)$$

这个解答满足如下条件: 垂直向应力 $\sigma_z = -q$; 对称性条件 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ 。

3 解答比较

通过对弹性力学中给出的楔形体、半平面体、圆锥体和半空间体等经典问题在荷载作用下的解答进行比较分析可以得到如下的解答关系, 如图 1。

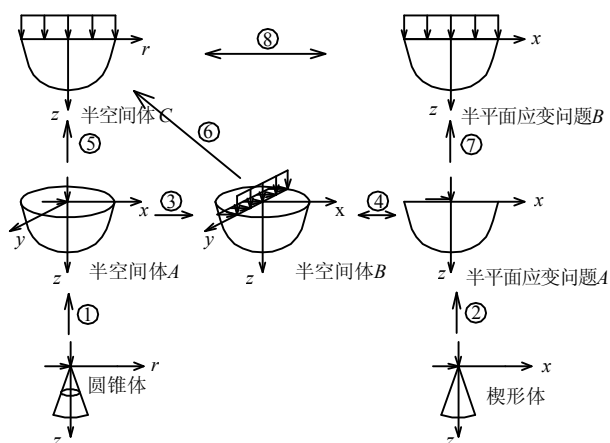


图 1 半空间体与半平面应变体关系

Fig.1 Relation of the semi-infinite spatial problem and the semi-infinite plane strain problem

半空间体问题与半平面体问题的解答存在如下关系, 如图 1 所示。

(1) 圆锥体在锥顶作用法向或切向集中力的解答可以导出半空间体在原点作用法向或切向集中力的解答;

(2) 楔形体在楔顶作用法向或切向集中力的解答可以导出半平面体在原点作用法向或切向集中力的解答;

(3) 可以由半空间体在表面一点作用法向或切向集中力的解答导出半空间体在表面沿 y 方向作用由负无穷到正无穷的线性均布法向或切向荷载的解答;

(4) 根据问题的对称性, 半空间体在表面沿 y 向作用由负无穷到正无穷的线性均布法向或切向荷载的解答与在原点作用一法向或切向集中力的半平面应变问题的解答是一致相通的;

(5) 可以由半空间体在表面一点作用法向或切向集中力的解答导出在水平表面上作用无限的均布法向或切向荷载的半空间体的解答;

(6) 可以由半空间体在表面沿 y 方向作用由负无穷到正无穷的线性均布法向或切向荷载的解答导出在水平表面上作用无限的均布法向或切向荷载的半空间体的解答;

(7) 可以由在表面一点作用一法向或切向集中力的半平面应变问题的解答导出在水平线上作用无限的均布法向或切向荷载的半平面应变问题的解答;

(8) 由关系 (4) 可以推知, 在水平线上作用无限的均布法向或切向荷载的半平面应变问题的解答与在水平表面上作用无限的均布法向或切向荷载的半空间体的解答应该是一致相通的。

图中, 半空间体 A 为半空间体在表面一点作用法向或切向集中力; 半空间体 B 为半空间体在表面沿 y 方向作用由负无穷到正无穷的线性均布荷载; 半空间体 C 为在水平表面上作用无限的均布法向或切向的半空间体; 半平面应变问题 A 为在表面一点作用一法向或切向集中力的半平面应变问题; 半平面应变问题 B 为在水平线上作用无限的均布法向或切向荷载的半平面应变问题。

4 解答分析

对关系图 1 分析可知:

(1) 在切向荷载作用下, 图 1 中的半空间体与半平面应变体问题的应力分量解答全部满足关系图, 且与积分次序无关。

(2) 在法向荷载作用下, 由半平面应变问题 A 的符拉芒解答直接积分得到的半平面应变问题 B 的应力解答为

$$\sigma_x = -q, \sigma_z = -q, \tau_{xz} = 0 \quad (2)$$

此时, 由第 2 节的“第 1 个判断依据”的对称性条件 $\varepsilon_y = 0$, 以及由上面计算得到的平面应变体问题 B 的解答 $\sigma_x = -q, \sigma_z = -q$, 并结合物理方程容易得到 $\sigma_y = -2\mu q$ 。

这样得到图 1 中半空间体 C 的解答为

$$\sigma_x = -q, \sigma_z = -q, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \sigma_y = -2\mu q \quad (3)$$

(3) 在法向荷载作用下, 由半空间体 A 的布希涅斯克直角坐标解答先对 y 积分得到半空间体 B 的解答, 然后对 x 积分得到半空间体 C 的解答。此时半空间体 C 的应力解答为

$$\sigma_x = -q, \sigma_y = -2\mu q, \sigma_z = -q, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (4)$$

此时与上述第 (2) 点中“由半平面应变问题 A 的符拉芒解答积分取极限得到半平面应变问题 B 的解答, 然后根据‘第 1 条判断依据’(对称性)得到的半空间体 C 的解答”是一致的。

(4) 在法向荷载作用下, 由半空间体 A 的布希

涅斯克直角坐标解答先对 x 积分, 然后对 y 积分得到半空间体 C 的解答。此时半空间体 C 的应力解答为

$$\sigma_x = -2\mu q, \sigma_y = -q, \sigma_z = -q, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (5)$$

(5) 在法向荷载作用下, 由半空间体 A 的布希涅斯克圆柱坐标解答按文献[1]P300~305 的方式进行分析, 得到半空间体 C 的应力解答为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{(1+2\mu)q}{2}, \sigma_y = -\frac{(1+2\mu)q}{2}, \\ \sigma_z &= -q, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6) 上述第(3~5)点中, 采用不同坐标系和不同积分次序得到半空间体 C 的解答, 也可由 A. E. 洛佛和 B. Г. 科罗特金氏所研究课题^[4]“半空间体在水平表面作用 $2a \times 2b$ 的矩形均布法向荷载的解答”先后对 a 、 b 取极限和同时对 a 、 b 取极限得到。

(7) 在法向荷载作用下, 虽然采用不同的坐标系以及采用不同的积分次序得到的半空间体 C 的应力解答不一致, 但这些解答的应力第一不变量 Θ 是相等的, 即

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = -(2+2\mu)q \quad (7)$$

5 解答讨论

由上面的比较、分析可知:

(1) 在法向或切向荷载作用下, 半空间体与半平面应变体的位移解答因部分积分存在奇异性, 不便于比较, 但从解答的形式以及部分位移比较来看, 基本上可以认为是一致相通的。

(2) 在切向荷载作用下, 图 1 中的半空间体与半平面应变体问题的应力分量解答全部满足关系图, 且与积分次序无关。

(3) 在法向荷载作用下, 应力解答则基本上满足图 1 的关系图, 但存在如下问题:

①由半空间体 A 的解答推求半空间体 C 的解答时, 与积分的先后顺序有关, 不同的积分次序, 其得到的解答是不一致的;

②如果由半空间体 A 的布希涅斯克解答先对 y 进行积分, 然后对 x 进行积分, 此时得到的半空间体 C 的解答与半平面应变问题 B 的解答是一致相通的, 此时关系图 1 是满足的, 否则将是不满足的。

③不同积分次序下半空间体 C 的解答与半平面应变问题 B 的解答存在一定的关系, 即满足应力第一不变量 Θ , 但有时并不是一致相通的。由此可见,

布希涅斯克解答不是半空间体 A 最合理的解答, 而是存在局限性。

④将这些解答与上述第 2 节的“第 2 个判断依据”给出的正确解答比较可知, 弹性力学中的半无限平面应变问题符拉芒解答和半空间体的布希涅斯克解答都是存在局限性。

⑤布希涅斯克应力解答与积分取极限的次序有关系的原因, 笔者认为, 这与积分表达式中含有反正切等函数以及无穷大是一个奇异数有关, 即数学函数性质的局限性导致积分次序的问题。

6 解答探求

在实际工程中, 常使用如下三种地基模型: 半无限大地基模型、底部完全位移约束的有限深地基模型和底部光滑刚性支承的有限深地基模型。如图 2、3 示。

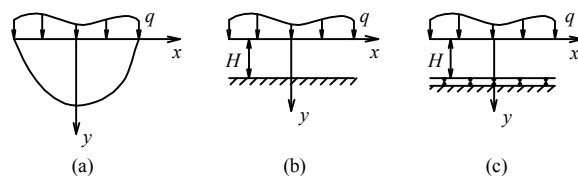


图 2 平面应变地基模型示意图

Fig.2 Sketch map of plane strain elastic foundation model

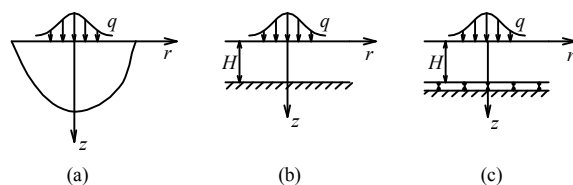


图 3 轴对称荷载下空间地基模型示意图

Fig.3 Sketch map of spatial elastic foundation model in axis symmetric loading

对荷载作用下的平面应变地基模型和空间地基模型分别采用傅立叶变换和汉克尔变换^①进行分析。

6.1 平面应变地基模型

(1) 水平表面作用任意分布压力下半无限大地基模型的应力和位移解答^[2]为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\tilde{q}(\lambda)[1-|\lambda|y]e^{-|\lambda|y}e^{i\lambda x}d\lambda \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\tilde{q}(\lambda)[1+|\lambda|y]e^{-|\lambda|y}e^{i\lambda x}d\lambda \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\lambda)(i\lambda y)e^{-|\lambda|y}e^{i\lambda x}d\lambda \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\mu}{Ei\lambda} (-1+2\mu+|\lambda|y) e^{-|\lambda|y} \tilde{q}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\mu}{E} \left[\frac{(2-2\mu+|\lambda|y)}{|\lambda|} e^{-|\lambda|y} \tilde{q}(\lambda) \right] e^{i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \right\}$$

式中: u 、 v 分别为 x 和 y 向的位移分量; σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 为应力分量; E 、 μ 分别为地基的弹性模量和泊松比; $q(x)$ 为任意分布压力; $\tilde{q}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{-i\lambda x} dx$, 假定 $q(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 绝对可积。

(2) 水平表面作用任意分布压力下底部完全位移约束有限深地基模型的应力和位移解答^[8]为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A\xi^2 e^{-|\xi|y} - 2B|\xi| e^{-|\xi|y} + B y \xi^2 e^{-|\xi|y} + C\xi^2 e^{|\xi|y} + 2D|\xi| e^{|\xi|y} + D\xi^2 y e^{|\xi|y}] e^{i\xi x} d\xi \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [-\xi^2 (e^{-|\xi|y} A + y e^{-|\xi|y} B + e^{|\xi|y} C + y e^{|\xi|y} D)] e^{i\xi x} d\xi \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{-i\xi[-|\xi| e^{-|\xi|y} A + (1-|\xi|y) e^{-|\xi|y} B + |\xi| e^{|\xi|y} C + e^{|\xi|y} (1+|\xi|y) D]\} e^{i\xi x} d\xi \\ u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1+\mu}{Ei\xi} [\xi^2 e^{-|\xi|y} A - (2-2\mu-|\xi|y)|\xi| e^{-|\xi|y} B + \xi^2 e^{|\xi|y} C + (2-2\mu+|\xi|y)|\xi| e^{|\xi|y} D] \right\} e^{i\xi x} d\xi \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1+\mu}{E} [|\xi| e^{-|\xi|y} A + (1-2\mu+|\xi|y) e^{-|\xi|y} B - |\xi| e^{|\xi|y} C + (1-2\mu-|\xi|y) e^{|\xi|y} D] \right\} e^{i\xi x} d\xi \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4(1-2\mu)(1-\mu)e^{-|\xi|H} + (1-|\xi|H)e^{-|\xi|H}}{(3-4\mu)(e^{|\xi|H} + e^{-|\xi|H})^2 + 4(1-2\mu)^2 + 4(\xi H)^2} + \frac{(3-4\mu)(1+|\xi|H)e^{|\xi|H}}{(3-4\mu)(e^{|\xi|H} + e^{-|\xi|H})^2 + 4(1-2\mu)^2 + 4(\xi H)^2} \right) \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^2} \\ B &= \frac{(1-2|\xi|H)e^{-|\xi|H} + (3-4\mu)e^{|\xi|H}}{(3-4\mu)(e^{|\xi|H} + e^{-|\xi|H})^2 + 4(1-2\mu)^2 + 4(\xi H)^2} \frac{\tilde{q}(\xi)}{|\xi|} \\ C &= \left(\frac{4(1-2\mu)(1-\mu)e^{|\xi|H} + (1+|\xi|H)e^{|\xi|H}}{(3-4\mu)(e^{|\xi|H} + e^{-|\xi|H})^2 + 4(1-2\mu)^2 + 4(\xi H)^2} + \frac{(3-4\mu)(1-|\xi|H)e^{-|\xi|H}}{(3-4\mu)(e^{|\xi|H} + e^{-|\xi|H})^2 + 4(1-2\mu)^2 + 4(\xi H)^2} \right) \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^2} \\ D &= -\frac{(1+2|\xi|H)e^{|\xi|H} + (3-4\mu)e^{-|\xi|H}}{(3-4\mu)(e^{|\xi|H} + e^{-|\xi|H})^2 + 4(1-2\mu)^2 + 4(\xi H)^2} \frac{\tilde{q}(\xi)}{|\xi|} \end{aligned}$$

其中, $\tilde{q}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{-i\xi x} dx$, 假定 $q(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 绝对可积; H 为地基厚度; 其余符号含义同前。

(3) 水平表面作用任意分布压力下底部光滑刚性支承有限深地基模型的应力和位移解答

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A\xi^2 e^{-|\xi|y} - 2B|\xi| e^{-|\xi|y} + B y \xi^2 e^{-|\xi|y} + C\xi^2 e^{|\xi|y} + 2D|\xi| e^{|\xi|y} + D\xi^2 y e^{|\xi|y}] e^{i\xi x} d\xi \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [-\xi^2 (e^{-|\xi|y} A + y e^{-|\xi|y} B + e^{|\xi|y} C + y e^{|\xi|y} D)] e^{i\xi x} d\xi \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{-i\xi[-|\xi| e^{-|\xi|y} A + (1-|\xi|y) e^{-|\xi|y} B + |\xi| e^{|\xi|y} C + e^{|\xi|y} (1+|\xi|y) D]\} e^{i\xi x} d\xi \\ u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1+\mu}{Ei\xi} [\xi^2 e^{-|\xi|y} A - (2-2\mu-|\xi|y)|\xi| e^{-|\xi|y} B + B + \xi^2 e^{|\xi|y} C + (2-2\mu+|\xi|y)|\xi| e^{|\xi|y} D] \right\} e^{i\xi x} d\xi \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1+\mu}{E} [|\xi| e^{-|\xi|y} A + (1-2\mu+|\xi|y) e^{-|\xi|y} B - |\xi| e^{|\xi|y} C + (1-2\mu-|\xi|y) e^{|\xi|y} D] \right\} e^{i\xi x} d\xi \end{aligned}$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(1+|\xi|H)e^{3|\xi|H} - (1-|\xi|H)e^{|\xi|H}}{4|\xi|He^{2|\xi|H} - 1 + e^{4|\xi|H}} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^2} \\ B &= \frac{e^{3|\xi|H} - e^{|\xi|H}}{4|\xi|He^{2|\xi|H} - 1 + e^{4|\xi|H}} \frac{\tilde{q}(\xi)}{|\xi|} \\ C &= \frac{(1+|\xi|H)e^{3|\xi|H} - (1-|\xi|H)e^{|\xi|H}}{4|\xi|He^{2|\xi|H} - 1 + e^{4|\xi|H}} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^2} \\ D &= -\frac{e^{3|\xi|H} - e^{|\xi|H}}{4|\xi|He^{2|\xi|H} - 1 + e^{4|\xi|H}} \frac{\tilde{q}(\xi)}{|\xi|} \end{aligned} \right\}$$

其中, $\tilde{q}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{-i\xi x} dx$, 假定 $q(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 绝对可积; 其余符号含义同前。

(4) 平面应变地基模型分析

①对于半无限大平面地基模型, 水平表面作用法向集中力时, 采用傅立叶变换法求得的应力和位移分量与符拉芒解答是一致的^[2]。

②当地基厚度 $H \rightarrow \infty$ 时, 无论底部是完全位移约束的有限深地基模型还是底部为光滑刚性支承的有限深地基模型, 在集中力作用下, 所得到的水平表面位移分量与符拉芒解答的位移分量在水平表面的结果是一致的。

③三种地基模型在水平表面作用无限均布压力时, 其对应的应力分量和位移分量是不一致的。

④水平表面作用有限宽均布压力时,当地基厚度 $H \rightarrow 0$ 时,底部为完全位移约束的有限深地基模型,对应的文克尔地基模型的基床系数^[8] $k = [E(1 - \mu)] / [(1 + \mu)(1 - 2\mu)H]$ ($|x| < c/2$, c 为均布压力宽度);底部为光滑刚性支承的有限深地基模型,对应的文克尔地基模型的基床系数 $k = E / [(1 - \mu^2)H]$ ($|x| < c/2$)。

6.2 空间地基模型

(1) 水平表面作用任意轴对称压力下半无限大地基模型的应力和位移解答^[6]为

$$\sigma_z(r, z) = -\int_0^\infty \xi [(1 + \xi z) e^{-\xi z} \tilde{q}(\xi)] J_0(\xi r) d\xi$$

$$\tau_{rz}(r, z) = -\int_0^\infty \xi [\xi z e^{-\xi z} \tilde{q}(\xi)] J_1(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_r(r, z) = -\int_0^\infty \xi (1 - \xi z) e^{-\xi z} \tilde{q}(\xi) J_0(\xi r) d\xi + \frac{1}{r} \int_0^\infty (1 - \xi z - 2\mu) e^{-\xi z} \tilde{q}(\xi) J_1(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_\theta(r, z) = -2\mu \int_0^\infty \xi e^{-\xi z} \tilde{q}(\xi) J_0(\xi r) d\xi - \frac{1}{r} \int_0^\infty (1 - \xi z - 2\mu) e^{-\xi z} \tilde{q}(\xi) J_1(\xi r) d\xi$$

$$\left. \begin{aligned} u_r(r, z) &= -\frac{1 + \mu}{E} \int_0^\infty \xi \left[(1 - \xi z - 2\mu) e^{-\xi z} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi} \right] J_1(\xi r) d\xi \\ w(r, z) &= \frac{1 + \mu}{E} \int_0^\infty \xi \left[(2 - 2\mu + \xi z) e^{-\xi z} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi} \right] J_0(\xi r) d\xi \end{aligned} \right\}$$

式中: u_r 、 w 分别为 r 和 z 方向的位移分量; σ_r 、 σ_θ 、 σ_z 、 τ_{rz} 为应力分量; E 、 μ 分别为地基的弹性模量和泊松比; $q(r)$ 为任意轴对称压力; $\tilde{q}(\xi) = \int_0^\infty r q(r) J_0(\xi r) dr$; $J_0(\xi r)$ 、 $J_1(\xi r)$ 分别为 0 阶和 1 阶贝塞尔函数。

(2) 水平表面作用任意轴对称压力下底部完全位移约束有限深地基模型的应力和位移解答^[6,9]为

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^\infty \xi [\xi^3 e^{-\xi z} A + (1 + \xi z - 2\mu) \xi^2 e^{-\xi z} B - \xi^3 e^{\xi z} C + (1 - \xi z - 2\mu) \xi^2 e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \xi [\xi^3 e^{-\xi z} A + (\xi z - 2\mu) \xi^2 e^{-\xi z} B + \xi^3 e^{\xi z} C + (\xi z + 2\mu) \xi^2 e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_r(r, z) = -\int_0^\infty \xi [\xi^3 e^{-\xi z} A - (1 + 2\mu - \xi z) \xi^2 e^{-\xi z} B - \xi^3 e^{\xi z} C - (1 + 2\mu + \xi z) \xi^2 e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi + \frac{1}{r} \int_0^\infty \xi^2 [\xi e^{-\xi z} A - (1 - \xi z) e^{-\xi z} B - \xi e^{\xi z} C - (1 + \xi z) e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_\theta(r, z) = 2\mu \int_0^\infty \xi [\xi^2 e^{-\xi z} B + \xi^2 e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi - \frac{1}{r} \int_0^\infty \xi^2 [\xi e^{-\xi z} A - (1 - \xi z) e^{-\xi z} B - \xi e^{\xi z} C - (1 + \xi z) e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi$$

$$u_r(r, z) = \frac{1 + \mu}{E} \int_0^\infty \xi [-\xi^2 e^{-\xi z} A + (1 - \xi z) \xi e^{-\xi z} B + \xi^2 e^{\xi z} C + (1 + \xi z) \xi e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi$$

$$w(r, z) = \frac{1 + \mu}{E} \int_0^\infty \xi [-\xi^2 e^{-\xi z} A - (2 - 4\mu + \xi z) \xi e^{-\xi z} B - \xi^2 e^{\xi z} C + (2 - 4\mu - \xi z) \xi e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi$$

式中:

$$A = -\left(\frac{(4 - 10\mu + 8\mu^2 - 4\mu\xi H + 2\xi^2 H^2)}{4\xi^2 H^2 + 4(1 - 2\mu)^2 + (3 - 4\mu)(e^{-\xi H} + e^{\xi H})^2} + \frac{(6\mu - 8\mu^2) e^{2\xi H}}{4\xi^2 H^2 + 4(1 - 2\mu)^2 + (3 - 4\mu)(e^{-\xi H} + e^{\xi H})^2} \right) \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^3}$$

$$B = -\frac{(1 - 2\xi H) + (3 - 4\mu) e^{2\xi H}}{4\xi^2 H^2 + 4(1 - 2\mu)^2 + (3 - 4\mu)(e^{-\xi H} + e^{\xi H})^2} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^2}$$

$$C = -\left(\frac{(-4 + 10\mu - 8\mu^2 - 4\mu\xi H - 2\xi^2 H^2)}{4\xi^2 H^2 + 4(1 - 2\mu)^2 + (3 - 4\mu)(e^{-\xi H} + e^{\xi H})^2} - \frac{(6\mu - 8\mu^2) e^{-2\xi H}}{4\xi^2 H^2 + 4(1 - 2\mu)^2 + (3 - 4\mu)(e^{-\xi H} + e^{\xi H})^2} \right) \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^3}$$

$$D = -\frac{(1 + 2\xi H) + (3 - 4\mu) e^{-2\xi H}}{4\xi^2 H^2 + 4(1 - 2\mu)^2 + (3 - 4\mu)(e^{-\xi H} + e^{\xi H})^2} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^2}$$

其中, $\tilde{q}(\xi) = \int_0^\infty r q(r) J_0(\xi r) dr$; $J_0(\xi r)$ 、 $J_1(\xi r)$ 分别为 0 阶和 1 阶贝塞尔函数; H 为地基厚度; 其余符号含义同前。

(3) 水平表面作用任意轴对称压力下底部光滑刚性支承有限深地基模型的应力和位移解答

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^\infty \xi [\xi^3 e^{-\xi z} A + (1 + \xi z - 2\mu) \xi^2 e^{-\xi z} B - \xi^3 e^{\xi z} C + (1 - \xi z - 2\mu) \xi^2 e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \xi [\xi^3 e^{-\xi z} A + (\xi z - 2\mu) \xi^2 e^{-\xi z} B + \xi^3 e^{\xi z} C + (\xi z + 2\mu) \xi^2 e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_r(r, z) = -\int_0^\infty \xi [\xi^3 e^{-\xi z} A - (1 + 2\mu - \xi z) \xi^2 e^{-\xi z} B - \xi^3 e^{\xi z} C - (1 + 2\mu + \xi z) \xi^2 e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi + \frac{1}{r} \int_0^\infty \xi^2 [\xi e^{-\xi z} A - (1 - \xi z) e^{-\xi z} B - \xi e^{\xi z} C - (1 + \xi z) e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}(r, z) &= 2\mu \int_0^{\infty} \xi [\xi^2 e^{-\xi z} B + \xi^2 e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi - \\ &\quad \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \xi^2 [\xi e^{-\xi z} A - (1 - \xi z) e^{-\xi z} B - \\ &\quad \xi e^{\xi z} C - (1 + \xi z) e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi \\ u_r(r, z) &= \frac{1 + \mu}{E} \int_0^{\infty} \xi [-\xi^2 e^{-\xi z} A + (1 - \xi z) \xi e^{-\xi z} B + \\ &\quad \xi^2 e^{\xi z} C + (1 + \xi z) \xi e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi \\ w(r, z) &= \frac{1 + \mu}{E} \int_0^{\infty} \xi [-\xi^2 e^{-\xi z} A - (2 - 4\mu + \xi z) \xi e^{-\xi z} B - \\ &\quad \xi^2 e^{\xi z} C + (2 - 4\mu - \xi z) \xi e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi\end{aligned}$$

式中:

$$\left. \begin{aligned}A &= \frac{(2\mu - 2\xi H)e^{2\xi H} - 2\mu e^{4\xi H}}{4\xi He^{2\xi H} + e^{4\xi H} - 1} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^3} \\ B &= -\frac{e^{4\xi H} - e^{2\xi H}}{4\xi He^{2\xi H} + e^{4\xi H} - 1} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^2} \\ C &= -\frac{2\mu - (2\xi H + 2\mu)e^{2\xi H}}{4\xi He^{2\xi H} + e^{4\xi H} - 1} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^3} \\ D &= -\frac{e^{2\xi H} - 1}{4\xi He^{2\xi H} + e^{4\xi H} - 1} \frac{\tilde{q}(\xi)}{\xi^2}\end{aligned}\right\}$$

其中, $\tilde{q}(\xi) = \int_0^{\infty} r q(r) J_0(\xi r) dr$; $J_0(\xi r)$ 、 $J_1(\xi r)$ 分别为零阶和一阶贝塞尔函数; 其余符号含义同前。

荷载作用下的底部完全位移约束有限深地基模型和底部光滑刚性支承有限深地基模型的应力和位移解答的表达式在形式上一样, 仅是系数 A 、 B 、 C 、 D 不同。

(4) 空间地基模型分析

①对半无限空间体地基模型, 水平表面作用法向集中力时, 采用汉克尔变换法求得的应力和位移分量与半空间体的布希涅斯克解答是一致的^[6]。

②当地基厚度 $H \rightarrow \infty$ 时, 无论底部是完全位移约束的有限深地基模型还是底部为光滑刚性支承的有限深地基模型, 在法向集中力作用下, 其得到的水平表面位移分量与布希涅斯克解答的位移分量在水平表面的结果是一致的。

③3 种地基模型在水平表面作用无限均布压力时, 其对应的应力分量和位移分量是不一致的。

④水平表面作用轴对称有限宽均布压力时, 当地基厚度 $H \rightarrow 0$ 时, 底部为完全位移约束的有限深地基模型, 对应的文克尔地基模型的基床系数^[9]

$$k = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)H} \quad (r < a, \quad a \text{ 为轴对称均布压力半径});$$

底部为光滑刚性支承的有限深地基模型,

对应的文克尔地基模型的基床系数 $k = \frac{E}{(1 - \mu^2)H}$ ($r < a$)。

6.3 无限均布压力下的平面应变地基模型比较

以下给出这些地基模型在水平表面作用无限均布压力时, 其在弹性体内产生的应力和位移分量, 然后进行研究。

(1) 半无限大平面应变地基模型

位移解答为

$$\begin{aligned}u &= -\frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E} qx \quad (x \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow \infty) \\ v &= \frac{(1 + \mu)q}{E} y + \frac{2(1 - \mu^2)q}{E} \infty = \frac{(1 + \mu)q}{E} y - \\ &\quad \frac{2(1 - \mu^2)q}{E} y + \infty = -\frac{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}{E} qy + C\end{aligned} \quad (8)$$

应力解答为

$$\sigma_x = -q, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (9)$$

(2) 底部完全位移约束的有限深地基模型

位移解答为

$$u = 0, \quad v = -\frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)q}{E(1 - \mu)}(y - H) \quad (10)$$

应力解答为

$$\sigma_x = -\frac{\mu}{1 - \mu} q, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (11)$$

(3) 底部光滑刚性支承的有限深地基模型

位移解答为

$$u = \frac{\mu(1 + \mu)}{E} qx, \quad v = -\frac{(1 - \mu^2)}{E} q(y - H) \quad (12)$$

应力解答为

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (13)$$

6.4 无限均布压力下的空间地基模型分析比较

(1) 半无限大空间体地基模型

位移解答为

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)q}{2E} r \quad (r \rightarrow \infty, \quad u_r \rightarrow \infty) \\ w &= \frac{1 + \mu}{E} qz + \frac{2(1 - \mu^2)q}{E} \infty = \frac{1 + \mu}{E} qz - \\ &\quad \frac{2(1 - \mu^2)q}{E} z + \infty = \frac{1}{E} (-1 + \mu + 2\mu^2) qz + C\end{aligned} \quad (14)$$

应力解答为

$$\sigma_r = -\frac{1 + 2\mu}{2} q, \quad \sigma_{\theta} = -\frac{1 + 2\mu}{2} q, \quad \sigma_z = -q, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (15)$$

(2) 底部完全位移约束的有限深地基模型
位移解答为

$$u_r = 0, w = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}(z-H) \quad (16)$$

应力解答为

$$\sigma_r = -\frac{\mu}{1-\mu}q, \sigma_\theta = -\frac{\mu}{1-\mu}q, \sigma_z = -q, \tau_{rz} = 0 \quad (17)$$

(3) 底部光滑刚性支承的有限深地基模型
位移解答为

$$u_r = \frac{(1+\mu)\mu q}{2E}r, w = -\frac{(1-\mu^2)q}{E}(z-H) \quad (18)$$

应力解答为

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{\mu q}{2}, \sigma_z = -q, \tau_{rz} = 0 \quad (19)$$

(4) 由 6.3 的 (2) 可知, 在图 2 中, 无限均布压力下的底部完全位移约束的有限深地基梁模型的应力解答为式 (11)。将上述应力解答转换到空间坐标系下, 并考虑平面应变问题是空间问题的特殊情况 (对称性), 有 $\varepsilon_y = 0$, 由式 (11) 及几何方程和物理方程容易得到:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}q, \sigma_z = -q, \tau_{zx} = 0 \quad (20)$$

由第 2 节的“第 2 条判断依据”以及上述的第 (2) 点和第 (4) 点比较可知, 三者的解答是一致相通的。

(5) 由 6.3 的 (3) 可知, 在图 2 中, 无限均布压力下的底部光滑刚性支承约束的有限深地基梁模型的应力解答为式 (13)。将上述应力解答转换到空间坐标系下, 并考虑平面应变问题的对称性, 由几何方程和物理方程容易得到:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = -\mu q, \sigma_z = -q, \tau_{xz} = 0 \quad (21)$$

注意到, 第 (3) 点和第 (5) 点的应力解答的应力第一不变量 Θ 是满足的, 即

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = -\mu q - q \quad (22)$$

通过上述的比较分析可知, 在水平表面作用无限均布压力时, 底部完全位移约束的有限深地基模型的应力解答与第 2 节判断依据的应力解答是一致的, 其他的则不是一致的。由此可以认为, 底部完全位移约束的有限深地基模型较其他两种地基模型更合理些。

7 结 语

本文根据两个合理的判断依据, 对法向与切向荷载作用下的半无限平面应变问题和半空间体问题

的解答进行了研究, 得到如下结论:

(1) 通过对弹性力学中的楔形体、半平面体、圆锥体和半空间体等经典解答进行研究分析, 发现了半平面应变问题和半空间体问题的解答之间的关系。

(2) 根据发现的半平面应变问题和半空间体问题的解答之间的关系, 并以两个合理的判断依据为判别准则, 指出弹性力学中的半平面应变问题的符拉芒解答和半空间体的布希涅斯克解答是有局限性和近似的。

(3) 对荷载作用下的平面应变地基模型和空间地基模型分别采用傅立叶变换和汉克尔变换进行了分析。通过对半无限大地基模型、底部完全位移约束的有限深地基模型和底部光滑刚性支承的有限深地基模型在水平表面作用无限均布压力时的应力和位移分量进行研究, 认为底部完全位移约束的有限深地基模型较其他两种地基模型更合理些。

(注①: 采用汉克尔变换对轴对称荷载下空间地基模型进行分析时, 采用如下假设: $\lim_{a \rightarrow \infty} a J_1(\xi a) / \xi \rightarrow \delta(\xi) / \xi$ 。其中, $J_1(\xi a)$ 为一阶 Bessel 函数, $\delta(\xi)$ 为 Dirac 函数。)

参 考 文 献

- [1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 284—286, 300—305.
- [2] 吴家龙. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 98—101, 135—136.
- [3] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1956: 204—207.
- [4] 潘家铮. 水工结构分析文集[M]. 北京: 电力工业出版社, 1981: 218—230.
- [5] 铁摩辛柯, 古地尔. 弹性理论[M]. 徐芝纶译. 北京: 高等教育出版社, 1990: 42, 475—481.
- [6] 郭大智, 冯德成. 层状弹性体系力学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001: 51—57.
- [7] B. Г. 列卡奇. 弹性力学概要与经典题解[M]. 姜弘道, 王润富, 王林生译. 徐芝纶校. 北京: 高等教育出版社.
- [8] 赵光恒, 张子明. 有限深地基上基础梁的计算[J]. 华东水利学院学报, 1984, 12(2): 32—45.
ZHAO Guang-heng, ZHANG Zhi-ming. Computing of foundation beam on elastic layer with finite depth[J]. Journal of East China Technical Univ. of Water Resources, 1984, 12(2): 32—45.
- [9] 张子明, 赵光恒. 用初始函数法计算成层地基在轴对称荷载作用下的位移和应力[J]. 华东水利学院学报, 1985, 13(4): 40—48.
ZHANG Zhi-ming, ZHAO Guang-heng. Computing displacement and stress of multilayer soils subjected to axis-symmetric loading by initial function method[J]. Journal of East China Technical Univ. of Water Resources, 1985, 13(4): 40—48.
- [10] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.